MA1 – přednáška 26. 10. 2020 („písemná")

1. Ještě jeden příklad na užití věty o limitě složené funkce:
   (viz přednáška 19.10.20, str. 14–15)
   $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$ a limity funkce $f(x)$ pro $x \to \pm\infty$, $x \to 2+$ a $x \to -1-$.

2. Věta o limitě absolutní hodnoty funkce.
   (přednáška z 19.10., str. 16)

3. Věty o spojitosti součtu, součinu, podílu funkcí, a o spojitosti funkce složené.
   (přednáška 19.10., str. 19)

4. Věta o limitě sevřené funkce a modifikace této věty pro nevlastní limity, a příklady užití těchto vět.
   (přednáška 19.10., str. 16–18)

A další příklady užití těchto vět (budeme „psát" VOS):

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x-\sin x} = ?$ – nejprve „typ" limity:

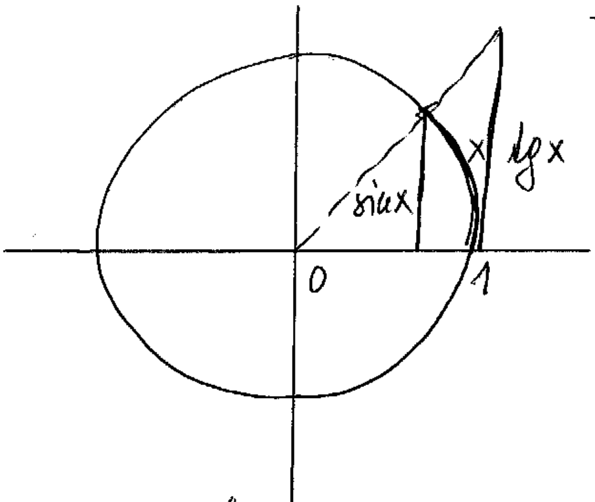
$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sin x) = +\infty$, neboť $x+\sin x \geq x-1$, $x \in \mathbb{R}$,
a $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$ (+VOS)

a podobně i
$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sin x) = +\infty$, neboť $x-\sin x \geq x-1$, $x\in\mathbb{R}$

Tedy: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x} = „\frac{\infty}{\infty}" \overset{(*)}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)} = 1$

(„zviditelnili" jsme ∞ – (*), a užili, že $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$)

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ – „$\frac{0}{0}$" – zde nevidíme", jak nuly v čitateli a "jmenovateli" zviditelnit" a srovnat – – najdeme „strážníky" – – z definice funkce sinus



(stačí vyšetřit limitu pro $x\to 0+$, neboť fce $\frac{\sin x}{x}$ je funkce sudá, tj. $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0-}\frac{\sin x}{x}$)

Z „obrázku" je vidět odhad: 1) pro $x>0$: $x \geqq \sin x \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad 1 \geqq \frac{\sin x}{x}$

2) pro $x>0$: $x \leqq \operatorname{tg} x$, tj.

$x \leqq \frac{\sin x}{\cos x}$,

pro $x>0$ $(x\to 0+)$ $\cos x>0$, tedy

$\cos x \leqq \frac{\sin x}{x}$

tedy, z 1) a 2) plyne, že v $P^+(0)$ je

$$\left.\begin{array}{l} \cos x \leqq \frac{\sin x}{x} \leqq 1 \\ \text{a} \quad \lim\limits_{x\to 0+}\cos x = 1, \quad \lim\limits_{x\to 0+} 1 = 1 \end{array}\right\} \underset{\text{VOS}}{\Rightarrow} \underline{\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x} = 1}$$

a tedy (díky sudosti funkce $\frac{\sin x}{x}$) i $\underline{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$

a odtud: $\underline{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x} \underset{AL}{=} 1\cdot 1 = \underline{1}$

$\underline{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x} =$

$\underset{AL}{=} 1^2\cdot\frac{1}{2} = \underline{\frac{1}{2}}$

Poznámka – „rada": má-li se najít limita typu „$\frac{0}{0}$", kde se vyskytuje goniometrická funkce (nebo i cyklometrická) hledejte zde „schovanou" limitu $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} (= 1)$).

Další příklady (aplikace limity $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$)

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin\sqrt{x}}{x} = \text{„}\frac{0}{0}\text{"} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \overset{AL}{=} \text{„}1 \cdot \frac{1}{0+}\text{"} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \underset{VLSF}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} \underset{T}{=} 1 \quad (\text{T – „tabáková" limita})$$

$$\left(y = \sqrt{x}, \ \text{a} \ \lim_{x\to 0+} \sqrt{x} = 0(+) \right)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} \underset{VLSF}{=} \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\sin y}{y}} \overset{AL}{=} \underline{1}$$

zde: $x = \sin(\arcsin x)$, $\arcsin x = y$

$\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x = 0$

podobně:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \underset{VLSF}{=} \lim_{y\to 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{tg} y}{y}} \overset{AL}{=} \underline{1}$$

neboť: $x = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$, $y = \operatorname{arctg} x$ a pro $x \to 0$ je $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arctg} x = 0$

Další (pro nás) důležitý příklad limit:

(doporučeno pro „samostatné" čtení)

(1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$, a

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Limita (2) už plyne z limity (1) – užitím VLSF a pojmu inverzní funkce:

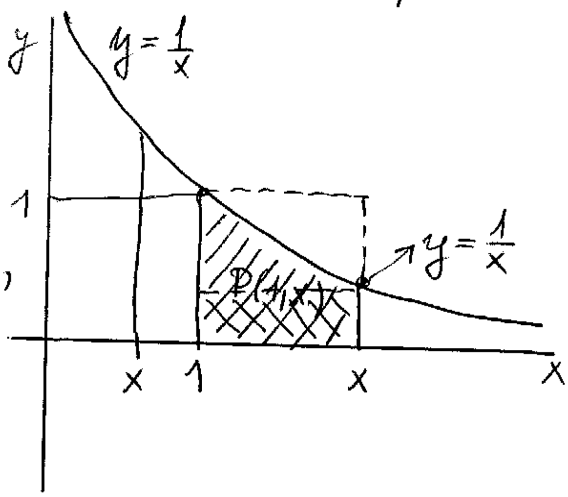
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\ln(e^x)} \underset{\text{VLSF}}{\overset{(*)}{=}} \lim_{y\to 1}\frac{y-1}{\ln y} = 1 \ (\text{dle } (1))$$

$x = \ln(e^x)$, $x\in R$

vnitřní funkce v (*) je $y = e^x$, $\lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$

Stačí tedy určit limitu $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$ – zde užijeme větu o limitě sevřené funkce (VOS) pomocí vztahu hodnot funkce $\ln x$ a velikosti plochy „pod" grafem funkce $f(x)=\frac{1}{x}$ (budeme mít později v integrálním počtu):

Funkci $\ln x$ lze definovat nejen jako funkci inverzní k funkci e^x, ale též takto:



pro $x > 1$: $\ln x = P(1,x)$

$x = 1$: $\ln 1 = P(1,1)$

$0 < x < 1$: $\ln x = -P(x,1)$,

kde $P(a,b)$ pro $0<a<b$ je velikost plochy mezi osou x a grafem funkce $f(x)=\frac{1}{x}$ pro $a\le x\le b$.

Nyní je „vidět":

pro $x>1$ (analogicky si zkuste sami pro $0<x<1$)

$$\frac{1}{x}(x-1) \le \ln x \le 1\cdot(x-1)$$, a odtud, $(x-1)>0$:

$$\frac{1}{x} \le \frac{\ln x}{x-1} \le 1 \quad (*)$$

a protože $\lim_{x\to 1+}\frac{1}{x} = \lim_{x\to 1+} 1 = 1$ (strážníci), je i ((*))

$$\lim_{x\to 1+}\frac{\ln x}{x-1} = 1. \quad (\text{VOS})$$

A uveďme ještě několik příkladů výpočtu limit:

1) $$\lim_{\substack{x\to a\\ a>0}} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = „\frac{0}{0}" \underset{„\text{úprava}"}{=} \lim_{x\to a} \frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \lim_{x\to a} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \underset{AL}{=} \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

2) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = „\frac{\infty}{\infty}" = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} =$$

$$= „\sqrt{1+0}" \underset{VLSF + AL}{=} 1$$

ale pozor!

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = „\frac{\infty}{-\infty}" = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} (-1)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = -1$$

(neboť $\sqrt{x^2} = |x|$!)

3) $$\lim_{x\to+\infty} (\sin x - x^2) = „\text{neur.} -\infty" = -\infty \text{ (VOS)},$$

neboť $\sin x - x^2 \leqq 1 - x^2$, a $\lim_{x\to+\infty}(1-x^2) = „1-\infty" = -\infty$

4) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = „\frac{0}{0}" = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3 \underset{VLSF+T}{=} „1\cdot 3" = 3$$

$\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1,\right.$ zde vnitřní fce je $y = 3x$, $\left.\lim_{x\to 0} 3x = 0 \right)$

5) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x^3} = „\frac{0}{0}" = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3}{x^2} = „1\cdot\frac{3}{0+}" = +\infty$$

6) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = „\frac{\infty}{\infty}" = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})} \underset{AL}{=} 1$$

$\left(\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \text{ a } \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \right)$ $\left(\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0 \right)$

Zkuste si i $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ $(= -1)$

Před formulací definic („přesných") jednotlivých druhů limit si uvedeme jistě užitečná tvrzení o t.zv. uspořádání limit:

Věta:

a) nechť 1) $f(x) \leqq g(x)$ v $P(a)$ $(a \in R^*)$

2) existují limity $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$;

potom $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leqq \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

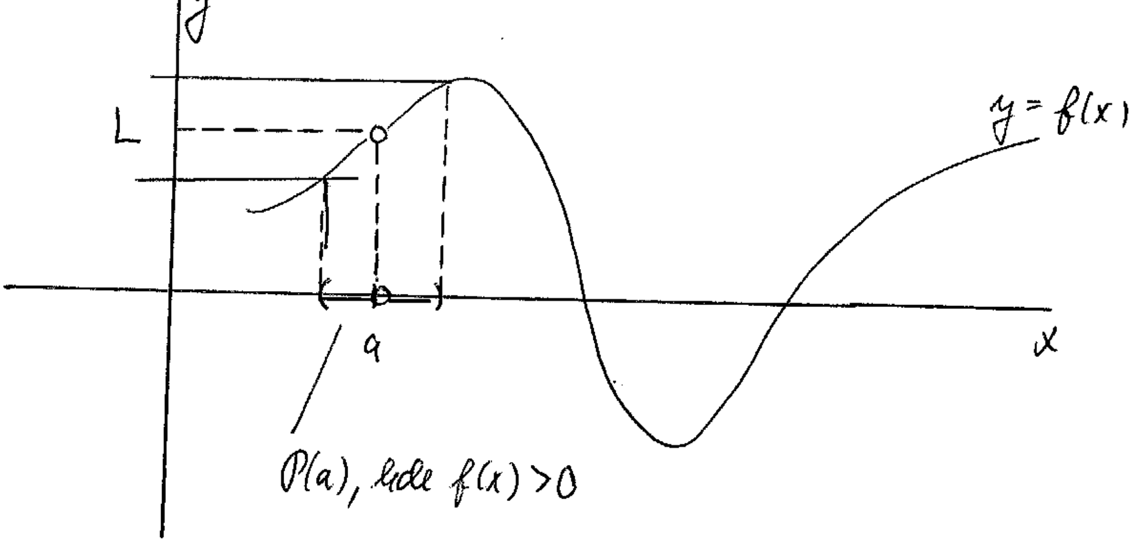
b) Je-li $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$ $(a \in R^*)$, pak existuje $P(a)$ tak, že pro $x \in P(a)$ platí $f(x) < g(x)$.

Užitečný důsledek:

Je-li $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L > 0$, pak existuje $P(a)$ takové, že $f(x) > 0$ v $P(a)$;

speciálně, je-li f spojitá v bodě $a \in Df$, $f(a) > 0$, pak existuje okolí $U(a)$ takové, že $f(x) > 0$ v $U(a)$.

(promyslete analogii pro limity jednostranné pro $a \in R$)



Nyní se pokusíme o „přesný" popis jednotlivých typů limit, tj. pokusíme si vysvětlit definice jednotlivých druhů limit (učíme se i „jazyk" matematiky):

Co budeme k definicím limit funkce (a tedy pak i pro definici spojitosti funkce v bodě) potřebovat? Je třeba nějak popsat, co „znamená" $x \to a$ (x se „blíží" k bodu $a \in R$)

(i $x \to a+$, $x \to a-$), i $x \to +\infty$ $(-\infty)$,

a stejně – co znamená (tj. jak přesně zapsat), že

$f(x) \longrightarrow L$ ($L \in R, \pm\infty$) – k tomu potřebujeme:

Vzdálenost v R (dvou čísel – bodů na reálné ose)

Definice: Jsou-li $a, b \in R$, pak vzdálenost bodů a, b – $d(a,b)$ – definujeme: $d(a,b) = |b-a|$ $(= |a-b|)$

Pro libovolné body $a, b, c \in R$ pak platí (základní vlastnosti vzdálenosti bodů v R):

1) $d(a,b) \geq 0$, $d(a,b) = 0 \iff a = b$;

2) $d(a,b) = d(b,a)$

3) $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$ (t.zv. trojúhelníková nerovnost)

Vzdálenost bodů v R jsme už užili při zápisu okolí bodu v R:

$a \in R, \delta > 0$: $\quad U(a,\delta) = \{x \in R;\ |x-a| < \delta\}$

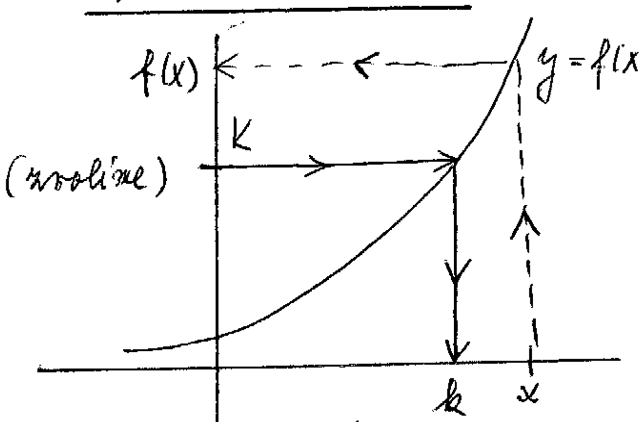
$\qquad P(a,\delta) = \{x \in R;\ 0 < |x-a| < \delta\}$

A nyní „zkusme" definice limity funkce.

1. Nevlastní limita v nevlastním bodě:

(pro cestu k definici limity asi nejjednodušší „typ" limity)

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ znamená – když zvolíme libovolně „vysoko" K (asi stačí $K > 0$), pak „musí" existovat takové k (i když třeba dost „daleko"), že pro x z intervalu $(k, +\infty)$ je už $f(x) > K$ (tj. pro $x \in (k, +\infty)$, neboli pro $x > k$), tedy:



Definice (slovní)

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, když k libovolnému K ($K > 0$ stačí) existuje $k \in R$ takové, že pro všechna $x > k$ je $f(x) > K$.

V matematice se užívají pro stručnější (a přesnější) zápis symboly – t.zv. kvantifikátory – pro zápis výrokových forem (tj. výroků s proměnnou):

1) $\forall x \in M : V(x)$ – pro všechna $x \in M$ platí výrok $V(x)$
(t.zv. velký kvantifikátor)

2) $\exists x \in M : V(x)$ – existuje $x \in M$ takové, že $V(x)$ platí
(t.zv. existenční kvantifikátor)

Tedy pak lze zapsat definici „nahoře":

Definice:

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, když platí: $\forall K (>0) \exists k \forall x > k : f(x) > K$.

(nebo)

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, když platí: $\forall \mathcal{O}(+\infty, K) \; \exists \; \mathcal{O}(+\infty, k) \; \forall x \in \mathcal{O}(+\infty, k) : f(x) \in \mathcal{O}(+\infty, K)$

(definice limity pomocí okolí)

Příklad: Zkusme ověřit pomocí definice, že $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$:

tedy – máme-li ověřit, že $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, musíme ukázat, že když zvolíme libovolné K (stačí $K>0$ pro $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$), pak najdeme k takové, že když $x > k$, pak $x^2 > K$:

Zvolme tedy $K > 0$, a hledejme k „němu" to k :

má-li být $x^2 > K \ (>0)$, pak $x > \sqrt{K}$, tj. zde už vidíme, že lze zvolit $k = \sqrt{K}$!

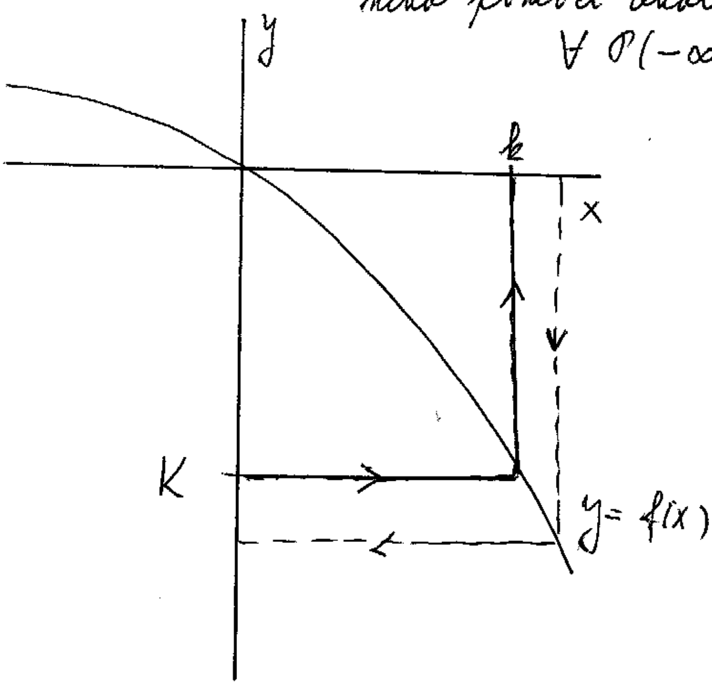
A ověříme: je-li $x > \sqrt{K} > 0$, pak $x^2 > K$, což jsme měli ukázat, tedy důkaz je hotov !

A definice limit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ se „vytvoří" analogicky – zkusme třeba:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$; $\forall K (<0)\ \exists k\ \forall x > k : f(x) < K$

neboli pomocí okolí:

$\forall \mathcal{O}(-\infty, K)\ \exists \mathcal{O}(+\infty, k)\ \forall x \in \mathcal{O}(+\infty, k) :$
$f(x) \in \mathcal{O}(-\infty, K)$



(zde označuji

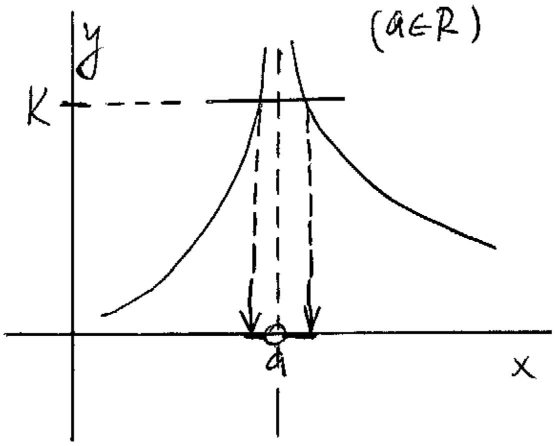
$\mathcal{O}(-\infty, K) = (-\infty, K)$

$\mathcal{O}(+\infty, k) = (k, +\infty)$)

(2) Nevlastní limita ve vlastním bodě:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ (a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ analogicky)

$(a \in \mathbb{R})$



opět, „musíme" se dostat libovolně vysoko s funkčními hodnotami někde „blízko" bodu a – pro libovolné K (opět stačí $K > 0$) zde najdeme prstencové okolí bodu a – – $P(a,\delta)$ – tak, že platí:

$$x \in P(a,\delta) \implies f(x) > K \; ;$$

a definici už zapíšeme „hned" pomocí kvantifikátorů:

Definice: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, když platí:

$$\forall K (>0) \; \exists \delta > 0 \; \forall x : \; 0 < |x-a| < \delta \implies f(x) > K$$

a ekvivalentně pomocí okolí:

$$\forall P(\infty) \; \exists P(a,\delta) \; \forall x \in P(a,\delta) : \; f(x) \in P(+\infty)$$

Příklad: Ukažme dle definice, že $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ –

– máme ukázat, že platí:

$$\forall K > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x : \; 0 < |x-1| < \delta \implies \frac{1}{(x-1)^2} > K :$$

zvolme tedy K (>0) a hledejme $\delta > 0$:

má-li být $\frac{1}{(x-1)^2} > K > 0$, pak je třeba, aby $(x-1)^2 < \frac{1}{K}$

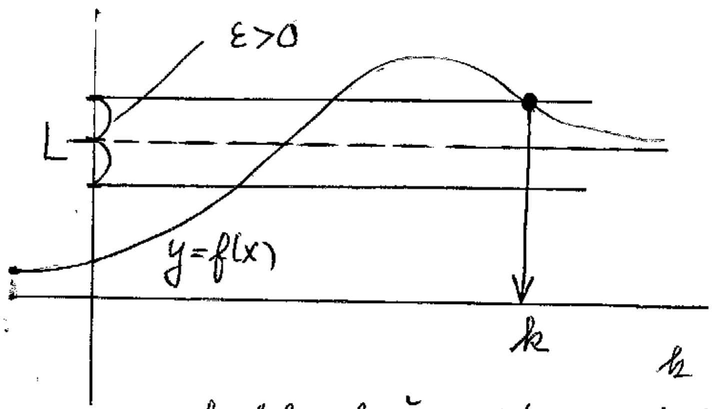
a (odmocněním) dostaneme $|x-1| < \frac{1}{\sqrt{K}}$, $x \neq 1$,

tedy zde $\delta = \frac{1}{\sqrt{K}}$ (a toto jsme měli najít – důkaz je hotov!)

Analogicky lze definovat $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ – zkuste si!

(3) Vlastní limita v nevlastním bodě:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \quad (L\in R)$ – zde je „nový" problém – máme se funkčními hodnotami $f(x)$ přiblížit libovolně blízko k bodu L, pokud budeme „dost" daleko na ose x – ale snad to už umíme:



k libovolně malému okolí $U(L,\varepsilon)$ limitní hodnoty L ($\varepsilon>0$) se budeme snažit najít $k\in R$ tj. okolí ∞: (k,∞)) tak, že pro $x\in(k,+\infty)$ bude $f(x)\in U(L,\varepsilon)$ – tedy

Definice: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$, tehdy platí:

$$\forall\, U(L,\varepsilon)\ (\varepsilon>0)\ \exists\, P(\infty)\ \forall\, x\in P(\infty) :\ f(x)\in U(L,\varepsilon)$$

a pomocí vzdálenosti v R:

$$\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, k\ \forall\, x>k :\ |f(x)-L|<\varepsilon,$$

A jednoduchý příklad:

máme-li ukázat, že $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{3x+1}=0$, máme ukázat dle definice, že platí:

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\, k\ (>0 \text{ stačí})\ \forall\, x>k :\ \left|\frac{1}{3x+1}\right|<\varepsilon \qquad (?)$$

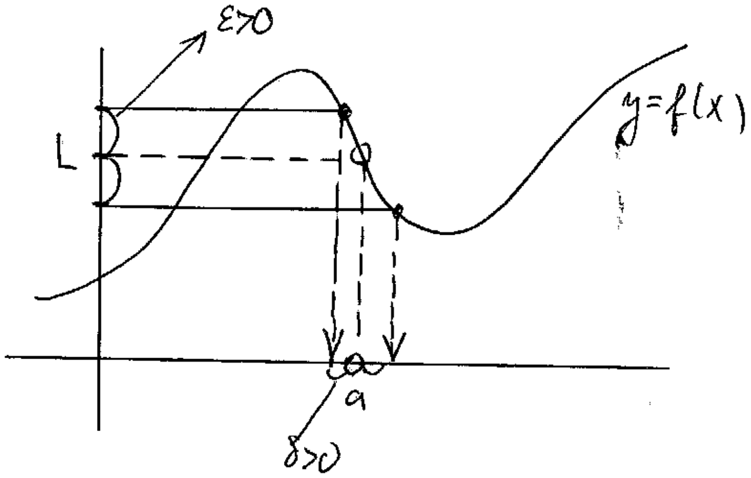
Zvolme $\varepsilon>0$; a začínáme opět „od konce" – má-li platit (?), pak pro taková x, že $3x+1>0$ (stačí pro $x\to\infty$), je třeba, aby

$3x+1>\frac{1}{\varepsilon}$, tj. $x>\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)$, tj. $k=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)$, pro námi zvolené $\varepsilon>0$

A $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ – definice analogicky

④ A poslední definice – vlastní limita ve vlastním bodě:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, $a \in R$, $L \in R$



zde už asi umíme –
– zvolíme-li ε>0 libovolně malé, pak k němu existuje $\delta>0$ tak, že pro $x \in P(a,\delta)$ je $f(x) \in U(L,\varepsilon)$
(zde na obrázku i $f(x) \in P(L,\varepsilon)$)

Definice:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, $a \in R$, $L \in R$, když platí:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x:\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

„pomocí" "okolí":

$$\forall\, U(L,\varepsilon)\ \exists\, P(a,\delta)\ \forall x \in P(a,\delta):\ f(x) \in U(L,\varepsilon)$$

Analogicky pro jednostranné limity:

$\lim\limits_{x\to a+} f(x) = L$, když platí:

$$\forall\, U(L,\varepsilon)\ \exists\, P^+(a,\delta)\ \forall x \in P^+(a,\delta):\ f(x) \in U(L,\varepsilon)$$

nebo:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x:\ x \in (a,a+\delta) \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

(analogicky pro $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = L$ – zde je $P^-(a) = (a-\delta, a)$)

A odtud i definice spojitosti funkce v bodě

Definice:

f je spojitá v bodě $a \in D_f$, když $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, tj.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x: \quad |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

nebo:

$$\forall\, \mathcal{U}(f(a),\varepsilon) \ \exists\, \mathcal{U}(a,\delta) \ \forall x \in \mathcal{U}(a,\delta): \ f(x) \in \mathcal{U}(f(a),\varepsilon)$$

Příklad:

Dokažme, že $\lim\limits_{x \to 1} (3x+1) = 4$;

tedy, máme dle definice ukázat, že, když zvolíme libovolně malé $\varepsilon > 0$, najdeme $\delta > 0$ tak, že bude platit (zde je i f spojitá v 1)

$$(0<)\,|x-1| < \delta, \quad \text{pak} \quad |(3x+1) - 4| < \varepsilon;$$

zvolme tedy $\varepsilon > 0$, a hledejme $\delta > 0$ tak, aby platilo

$$|(3x+1) - 4| < \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad 3|x-1| < \varepsilon;$$

pak stačí vzít $|x-1| < \frac{\varepsilon}{3}$, tj. $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ (to jsme hledali);

vyzkoušejme, že je to „dobře":

je-li $\varepsilon > 0$, a vezmeme-li $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, pak, když

$|x-1| < \frac{\varepsilon}{3}$, je

$3|x-1| < \varepsilon$, tj.

$|3x-3| < \varepsilon$, a tedy i $|(3x+1)-4| < \varepsilon$,

tedy, dokonce jsme ukázali, že funkce $f(x) = 3x+1$ je v bodě $x=1$ spojitá!